Вариант 120 (для разбора на семинаре)

Задача 1. Радиус шара — (12.3 ± 0.1) см. Рассчитайте объём ($V = \frac{4}{3}\pi r^3$). Формулу для погрешности выведите из соотношения $\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}$.

Решение.

Найдём частную производную объёма по радиусу:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi r^2$$

Далее с её использованием выведем формулы для абсолютной (ΔV) и относительной (δV) погрешностей объёма:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{4/3\pi r^3} = \frac{3\Delta r}{r} = 3\delta r;\ V = 4/3 \cdot 3.14159 \cdot (12.3)^3 = 7794.8 \text{ см}^3$$

Теперь рассчитаем объём шара и его относительную и абсолютную погрешность:

$$\delta V = 3\delta r = 3\frac{0.1}{12.3} = 3 \cdot 0.0081 = 0.0244;\ \Delta V = \delta V \cdot V = 0.0244 \cdot 7794.8 = 190.3 \text{ см}^3$$

Ответ: $(7.79 \pm 0.19) \cdot 10^3$ см^3

Задача 2. При измерении массовой доли олова в сплаве с $\omega(\mathrm{Sn}) = 66.21 \pm 0.01$ % были получены следующие значения: 66.30 %, 66.30 %, 66.26 %, 66.37 %, 66.30 %. Найти среднее значение и его доверительный интервал. Содержит ли методика измерения систематическую погрешность?

Решение

Найдём среднее значение и стандартное отклонение для $\omega(\mathrm{Sn})$:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{N}\sum_i x_i = \frac{66.30 + 66.30 + 66.26 + 66.37 + 66.30}{5} = 66.306\ \%$$

$$s_\omega = \sqrt{\frac{\sum_i (\omega_i - \bar{\omega})^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{3(66.30 - 66.306)^2 + (66.26 - 66.306)^2 + (66.37 - 66.306)^2}{4}} = 0.0397$$

Рассчитаем 95-%-ный доверительный интервал, используя двухсторонние квантили распределения Стьюдента:

$$\Delta\omega = \frac{t_{\alpha,N-1} \cdot s_\omega}{\sqrt{N}} = \frac{2.776 \cdot 0.0397}{\sqrt{5}} = 0.0493$$

Погрешность массовой доли олова в образце по его паспорту намного меньше, чем величина доверительного интервала, полученного для исследуемой методики измерения, поэтому считаем значение «по паспорту» точным и применяем односторонний t-критерий. Значение 66.21 не попадает в доверительный интервал, т.е. методика содержит систематическую погрешность.

Ответ: (66.31 ± 0.05) %. Содержит.

Задача 3. В программных пакетах двухсторонний α-квантиль t-распределения (распределения Стьюдента) может рассчитываться как «α — вероятность попадания случайной величины в доверительный интервал», так и как «α — вероятность выпадения случайной величины из доверительного интервала». Как проверить, какой именно квантиль рассчитывается функцией?

Решение

В подобных теоретических задачах целесообразно проверять предельное поведение функции. Рассмотрим случай двусторонних квантилей t - распределения. Если квантиль для данного значения α соответствует вероятности попадания среднего значения в доверительный интервал, то при стремлении α к единице он стремится к бесконечности. В случае же если он соответствует вероятности не попасть в доверительный интервал, то при $\alpha \to 1$ $t_\alpha \to 0$.

В контрольных работах имеются также теоретические вопросы про:

- Лево- и правосторонние квантили распределения Пирсона
- Связь интегральной функции распределения и функции плотности вероятности распределения
- Применение критерия Пирсона в том случае, если одно из распределений - непрерывное (см. презентацию к занятию 3 для более подробных разъяснений).

В Задаче 3 рекомендуется иллюстрировать свой ответ соответствующим графиком функции плотности вероятности распределения (более того, подобные рисунки могут помочь решить задачу).

Задача 4. В ходе бросания игральной кости были получены следующие результаты:

Грань	1	2	3	4	5	6
Частота	14	14	3	7	5	5

Подчиняются ли результаты равномерному распределению?

Решение

Рассчитаем теоретическое распределение для данного случая. Сумма частот составляет

$$N_\Sigma = 14 + 14 + 3 + 7 + 5 + 5 = 48$$

В случае равномерного распределения ожидаемая частота для каждой грани $E_i = 48/6 = 8$. Найдём χ^2_{emp}:

$$\chi^2_{\text{emp}} = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 2\frac{(14-8)^2}{8} + \frac{(3-8)^2}{8} + \frac{(7-8)^2}{8} + 2\frac{(5-8)^2}{8} = 14.50$$

Теперь найдём левосторонний квантиль распределения χ^2 для $\alpha = 0.95$ и $5 = 6-1$ степеней свободы:

$$\chi^2_{0.95,5} = 11.07$$

Т.к. $\chi^2_{\text{emp}} > \chi^2_{0.95,5}$, то с вероятностью 0.95 результаты бросания игральной кости не подчиняются равномерному распределению.

Ответ: не подчиняется.