Пробный вариант

Это — пробный вариант контрольной работы № 3 с решением. На написание работы будет дано не менее 1 часа. Задачи 3 и 4 несколько сложнее тех, что будут в реальных вариантах.

Задача 1. Перевести в двоичные дроби числа 0.0625 и 0.65 (можно использовать расчёт вручную, а также разбор формата вывода `format hex`). Для какого из них расчёт выражения $\sum_{i=1}^{10000} a$ в GNU Octave даст точный результат (ответ обосновать)?

Решение. Переведём числа в двоичные дроби вручную:

```
0.0625 * 2 = 0.125
0.125  * 2 = 0.25
0.25   * 2 = 0.5
0.5    * 2 = 1.0
```

$0.0625_{10} = 0.0001_2$, т.е. конечная двоичная дробь, может быть точным образом представлена в виде двоичного числа с плавающей запятой. При суммировании 10000 чисел ошибок округления не будет. Проверим полученный результат:

$$0.0001_2 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0.0625$$

```
0.65 * 2 = 1.3
0.3  * 2 = 0.6
0.6  * 2 = 1.2
0.2  * 2 = 0.4
0.4  * 2 = 0.8
0.8  * 2 = 1.6
0.6  * 2 = 1.2
.............
```

$0.65_{10} = 0.10(1001)_2$, т.е. бесконечная периодическая двоичная дробь, не может быть точным образом представлена в виде двоичного числа с плавающей запятой. При суммировании 10000 чисел возможны ошибки округления. Проверим полученный результат. Для получения четырёх значащих десятичных цифр нужно взять $4\log_2 10 = 13.3$ (округляем до 14) двоичных разрядов.

$$0.10(1001)_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6}\right) + \left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}}\right) + \left(\frac{1}{2^{11}} + \frac{1}{2^{13}}\right) + \frac{1}{2^{14}} + \ldots \approx 0.6500$$

Примечание: в решении контрольной работы проверка результата переводом в десятичную дробь не является обязательной.

Задача 2. Рассчитать абсолютные погрешности (без учёта ошибки округления) численного дифференцирования функции $\ln x$ при $x = e$ по следующим формулам:

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{2}$$

Какая из них предпочтительнее? Ответ обосновать с помощью графика (не количественного) с зависимостями погрешности формулы и погрешности округления от Δx. Считать, что погрешность округления одинакова в обоих случаях и обратно пропорциональна Δx. График строить в логарифмических координатах $\lg(\Delta x)$ – $\lg(\Delta f)$.

Решение. Разложим функцию $\ln x$ в ряд Тейлора

$$\ln(x+\Delta x) = \ln\left[x\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \ln x + \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^4 + \ldots \quad (3)$$

Подставим это разложение в формулы численного дифференцирования, полагая, что при $n > 1$ $(\Delta x)^n = 0$:

$$f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\ln x + \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \ldots - \ln x}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2x^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\ln x + \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots}{2\Delta x} -$$
$$\frac{\ln x - \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots}{2\Delta x} = \frac{2\frac{\Delta x}{x} + \frac{2}{3}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^3 + \ldots}{2\Delta x} = \frac{1}{x} + \frac{(\Delta x)^2}{3x^3} \quad (5)$$

Оценим абсолютную погрешность округления для формул 1 и 2. Будем считать, что относительная погрешность расчёта натурального логарифма равна ε (ε — машинный ноль, для типа `double` $\varepsilon = 2^{-52} \approx 2.2 \cdot 10^{-16}$).

Для формулы 1 абсолютная погрешность числителя составит $2\varepsilon \ln x$ (т.к. $\ln(x \pm \Delta x) \approx \ln x$), знаменателя — $\varepsilon \Delta x$. Относительные погрешности числителя и знаменателя — $2\varepsilon \ln x / \left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{2\varepsilon x \ln x}{\Delta x}$ и ε соответственно. Найдем относительную $(\epsilon(f'(x)))$ и абсолютную $(\delta(f'(x)))$ погрешность вычисления формулы, сложив относительные погрешности числителя и знаменателя:

$$\epsilon(f'(x)) = \varepsilon + \frac{2\varepsilon x \ln x}{\Delta x} = \varepsilon\left(1 + \underbrace{\frac{2x \ln x}{\Delta x}}_{\gg 1}\right) \approx \frac{2\varepsilon x \ln x}{\Delta x};\ \delta(f'(x)) = \frac{2\varepsilon \ln x}{\Delta x} \quad (6)$$

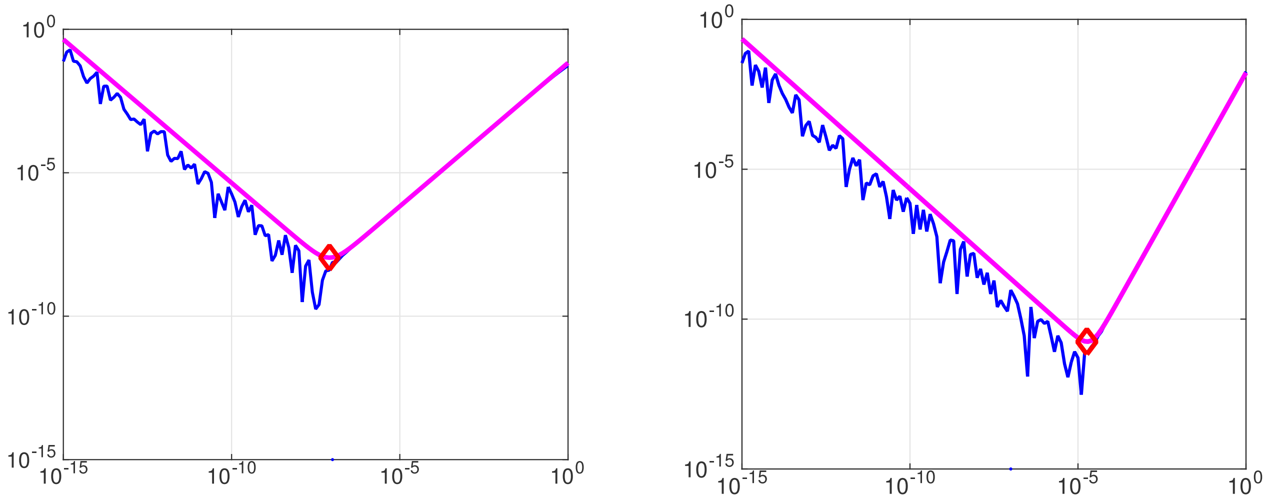
В случае формулы 2 численного дифференцирования абсолютная погрешность числителя составит $2\varepsilon \ln x$, знаменателя — $2\varepsilon \cdot 2\Delta x = 4\varepsilon \Delta x$. Относительные погрешности — $2\varepsilon \ln x / \left(\frac{2\Delta x}{x}\right) = \frac{\varepsilon x \ln x}{\Delta x}$ и 2ε соответственно.

Найдем относительную $(\epsilon(f'(x)))$ и абсолютную $(\delta(f'(x)))$ погрешность вычисления формулы, сложив относительные погрешности числителя и знаменателя:

$$\epsilon(f'(x)) = 2\varepsilon + \frac{\varepsilon x \ln x}{\Delta x} = \varepsilon\left(2 + \underbrace{\frac{2x \ln x}{\Delta x}}_{\gg 1}\right) \approx \frac{\varepsilon x \ln x}{\Delta x};\ \delta(f'(x)) = \frac{\varepsilon \ln x}{\Delta x} \quad (7)$$

Оценим оптимальное значение Δx в случае формулы 1

$$\delta(\Delta x) = \frac{2\varepsilon \ln x}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2x^2} \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial(\Delta x)} = -\frac{2\varepsilon \ln x}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\varepsilon \ln x}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2x^2} \Leftrightarrow$$
$$(\Delta x)^2 = \varepsilon \cdot 4x^2 \ln x \Leftrightarrow \Delta x = \sqrt{\varepsilon} \cdot 2x\sqrt{\ln x} \quad (8)$$



(а)

(б)

Рис. 1: Абсолютная погрешность численного дифференцирования функции $\ln x$ при $x = e$ (а) для формулы 1 (б) для формулы 2. Синяя линия — вычислительный эксперимент, сиреневая — оценка погрешности из теоретических соображений.

Оценим оптимальное значение Δx в случае формулы 2

$$\delta = \frac{\varepsilon \ln x}{\Delta x} + \frac{(\Delta x)^2}{3x^3} \Rightarrow \frac{\partial \delta}{\partial(\Delta x)} = -\frac{\varepsilon \ln x}{(\Delta x)^2} + \frac{2\Delta x}{3x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\Delta x}{3x^3} = \frac{\varepsilon \ln x}{(\Delta x)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Delta x = \sqrt[3]{\varepsilon} \cdot x\sqrt[3]{1.5 \ln x} \quad (9)$$

Построим в GNU Octave графики зависимости суммарной погрешности численного дифференцирования от шага дифференцирования Δx в билогарифмических координатах (см. рис. 1.

На контрольной работе потребуется построить эти графики полуколичественно (корректно отобразить наклоны прямых и оценить точку их пересечения), т.е. использование компьютера для этих целей не обязательно. Особое внимание уделите наклону прямых и сравнению погрешностей (с точностью до десятичного порядка).

Программа на GNU Octave (MATLAB) для первой формулы (визуализация графика):

```
dx = 10.^(-15:0.1:0);
e = exp(1);
df_emp = abs((log(e+dx) - log(e))./dx - 1./e);
dx_opt = sqrt(eps) * 2*e*sqrt(log(e))
delta_opt = 2*eps*log(e)/dx_opt + dx_opt / (2*e^2)
loglog(dx,df_emp, 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;
loglog(dx,2*eps./dx + dx./(2*e^2), 'm-', 'LineWidth', 3);
loglog(dx_opt, delta_opt, 'rd', 'MarkerSize', 12, 'LineWidth', 3);
loglog(1e-7, 1e-15, 'b.');
hold off;
```

```
grid on;
box on;
set(gca, 'FontSize', 14);
print('lnx_dx', '-depsc');
```

Программа на GNU Octave (MATLAB) для второй формулы (визуализация графика):

```
dx = 10.^(-15:0.1:0);
e = exp(1);
df_emp = abs((log(e+dx) - log(e-dx))./(2*dx) - 1./e);
dx_opt = nthroot(eps, 3) * e*nthroot(1.5*log(e), 3);
delta_opt = eps*log(e)/dx_opt + dx_opt^2 / (3*e^3)
loglog(dx,df_emp, 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;
loglog(dx,eps./dx + dx.^2./(3*e^3), 'm-', 'LineWidth', 3);
loglog(dx_opt, delta_opt, 'rd', 'MarkerSize', 12, 'LineWidth', 3);
loglog(1e-7, 1e-15, 'b.');
hold off;
grid on;
box on;
set(gca, 'FontSize', 14);
print('lnx_2dx', '-depsc');
```

Задача 3. Записать в виде синтаксического дерева и обратной польской записи выражение $\frac{\cos^2 x+\sin^2 y}{10^z}$

Решение. Обратная польская запись выражения приведена ниже. Синтаксическое дерево показана на рис. 2

```
x cos 2 ^ y sin 2 ^ + 10 z ^ /
```

Задача 4. Вычислить значения функции $\exp\left(-\frac{1}{3x+1}\right)$ и её производной в точке $x = -2$ двумя способами: с помощью дуальных чисел вручную (см. метод автоматического дифференцировани) и аналитически.

Решение.

Рассчитаем значения функции и её производной с помощью дуальных чисел:

$$\exp\left(-\frac{1}{3x+1}\right) = \exp\left(\frac{-1}{3(-2+\varepsilon)+1}\right) = \exp\left(\frac{1}{5-3\varepsilon}\right) = \exp\left(\frac{5+3\varepsilon}{(5-3\varepsilon)(5+3\varepsilon)}\right) =$$
$$\exp\left(\frac{5+3\varepsilon}{25}\right) = \exp\left(0.2+0.12\varepsilon\right) = e^{0.2} + 0.12e^{0.2}\varepsilon \approx \underbrace{1.2214}_{f(-2)} + \underbrace{0.1466}_{f'(-2)}\varepsilon \quad (10)$$

Найдём производную функции $\exp\left(-\frac{1}{3x+1}\right)$ аналитически и рассчитаем её значение в точке -2:

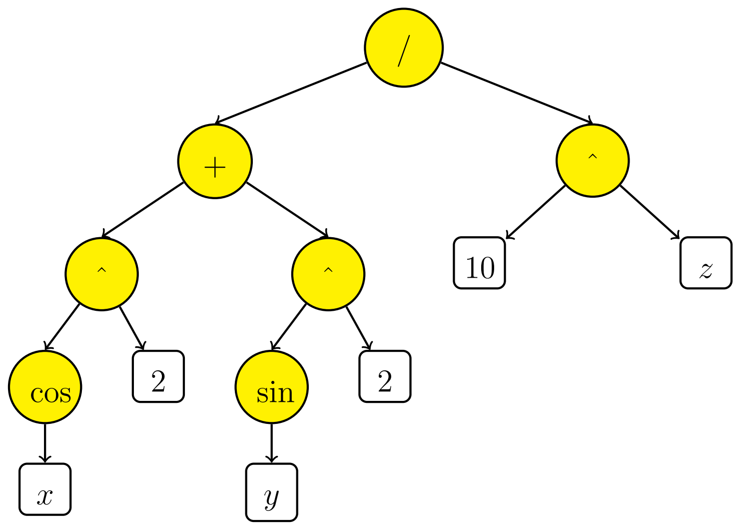


Рис. 2: Синтаксическое дерево к задаче 3

$$\exp\left(-\frac{1}{3x+1}\right) = \exp\left(-\frac{1}{3x+1}\right)\frac{1}{(3x+1)^2};\ \exp\left(-\frac{1}{-3\cdot 2+1}\right)\frac{3}{(-3\cdot 2+1)^2} = \frac{3e^{0.2}}{25} \approx 0.1466 \tag{11}$$

Задача 5. Найти значение выражения, записанного в обратной польской записи, и перевести его в обычную (инфиксную) запись.

```
14 2 3 4 - * / 6 -
```

Решение. Вычислим значение выражения, используя концепцию стека:

```
             | 14 2  3  4  -  *  /  6  -
14  2  3  4 | -  *  /  6  -
14  2 -1    | *  /  6  -
14 -2       | /  6  -
-7 6        | -
-13         |
```

Результат вычислений: (-13)

Преобразуем выражение в инфиксную (обычную) запись, также используя концепцию стека (но помещая туда не только числа, но и арифметические выражения):

```
                | 14 2  3  4  -  *  /  6  -
14  2  3  4     | -  *  /  6  -
14  2  (3-4)    | *  /  6  -
14  2*(3-4)     | /  6  -
14/(2*(3-4)) 6 | -
14/(2*(3-4))-6 |
```

Результат преобразования в инфиксную запись: $\frac{14}{2(3-4)} - 6$